

PACS: 89.65.Gh

## USE OF PHYSICAL KINETICS FOR STUDYING OSCILLATIONS PARAMETERS PRODUCTION LINE

**V.D. Khodusov<sup>1</sup>, O.M. Pignasty<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*V.N. Karazin Kharkiv National University*

*4 Svobody Sq., Kharkov 61022, Ukraine*

*e-mail: [ykhodusov@ukr.net](mailto:ykhodusov@ukr.net)*

<sup>2</sup>*National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"*

*61002, Kharkov, st. Frunze 21, Ukraine*

*e-mail: [pom7@bk.ru](mailto:pom7@bk.ru)*

Received October 1, 2014

Presents modern methods of describing the production system. Shows a consistent relationship between the object (micro level) and streaming (macro level) description of the system. Recorded in two moment approximation linearized equations for small perturbations of stream parameters of the production line and the conditions for their applicability. In the first method of Lyapunov stability criteria are defined for the parameters of the production line. Using the methods of physical kinetics investigated the dynamics of the perturbation parameters synchronized production line. Oscillation damping mechanism is shown and proved.

**KEY WORDS:** kinetic equation beltline, production system, PDE-model, dispersion equation, the subject of labor stability

## ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДІВ ФІЗИЧНОЇ КІНЕТИКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ПАРАМЕТРІВ ПОТОКОЇ ЛІНІЇ

**В.Д. Ходусов<sup>1</sup>, О.М. Пігнастий<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Харківський національний університет ім. В.Н. Каразіна,*

*61022, Харків, пл. Свободи 4, Україна*

<sup>2</sup>*Національний технічний університет «Харківський Політехнічний Інститут»*

*61002, Харків, вул. Фрунзе 21, Україна*

Викладено сучасні методи опису виробничої системи. Показана узгоджена зв'язок між предметно-технологічним (мікрорівень) і потоковим (макрорівень) описом системи. Записані в двухмоментне наближенні лінеаризовані рівняння для малих збурень потокових параметрів виробничої лінії і визначені умови їх застосовності. Отримані критерії стійкості для параметрів потокової лінії за першим методом Ляпунова. З використанням методів фізичної кінетики досліджена динаміка розвитку збурень для параметрів синхронізованою виробничої лінії. Визначений і обґрунтований механізм затухання коливань.

**КЛЮЧОВІ СЛОВА:** кінетичне рівняння, виробнича система, потокова лінія, PDE -модель, дисперсійне рівняння, предмет праці, стійкість

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ

**В.Д. Ходусов<sup>1</sup>, О.М. Пигнастый<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина,*

*61022, Харьков, пл. Свободы 4, Украина*

<sup>2</sup>*Национальный технический университет «Харьковский Политехнический Институт»*

*61002, Харьков, ул. Фрунзе 21, Украина*

Изложены современные методы описания производственной системы. Показана согласованная связь между предметно-технологическим (микроуровень) и потоковым (макроуровень) описанием системы. Записаны в двухмоментном приближении линеаризованные уравнения для малых возмущений потоковых параметров производственной линии и определены условия их применимости. Получены критерии устойчивости для параметров поточной линии по первому методу Ляпунова. С использованием методов физической кинетики исследована динамика развития возмущений для параметров синхронизированной производственной линии. Определен и обоснован механизм затухания колебаний.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** кинетическое уравнение, производственная система, поточная линия, PDE -модель, дисперсионное уравнение, предмет труда, устойчивость

## АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Известно, что поточная линия в неравновесном состоянии характеризуется тем, что в ней из-за наличия пространственной неоднородности плотности распределения предметов труда по состояниям и асинхронной работы технологического оборудования, размещенного вдоль технологического маршрута, постоянно существуют колебания параметров [1]. Амплитуда колебаний определяет размер емкости межоперационных накопителей, необходимых для обеспечения бесперебойной работы поточной линии. Колебания параметров

тесно связаны со стохастическим характером взаимодействия предметов труда и производственного оборудования. Если величина межоперационных заделов вследствие колебаний становится равной нулю или превышает размер емкости межоперационных накопителей, то производственная линия останавливается, что является недопустимым. В связи с этим представляет практический интерес задача определения периода возникающих колебаний потоковых параметров и условия, при которых указанные колебания являются затухающими. Экспериментальная оценка периода колебаний потоковых параметров производственной линии дана в [1]. Однако, аналитические исследования зависимости периода колебаний от характерных параметров производственных линий в зарубежной и отечественной литературе отсутствуют. Это определило цель настоящей работы: а) определить критерии устойчивости параметров поточной линии; б) разработать аналитический метод расчета собственных частот колебаний параметров синхронизированных поточных линий; в) обосновать механизм возникновения колебаний потоковых параметров; г) найти условия, при которых колебания потоковых параметров синхронизированных производственных линий являются затухающими.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ

Функционирование современного предприятия с массовым выпуском продукции может быть представлено в виде стохастического процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного состояния в другое [2]. Состояние системы определено как состояние общего числа  $N$  предметов труда производственной системы. Поведение предмета труда подчиняется определенным законам в соответствии с установленным на предприятии технологическим процессом. Состояние предмета труда описывается в фазовом пространстве состояний величинами  $(S_j, \mu_j)$ , где  $S_j$  (грн) и  $\mu_j$  (грн/час) соответственно сумма общих затрат и интенсивность их переноса на  $j$ -й предмет труда,  $0 < j \leq N$ . Состояние системы в некоторый момент времени будет определено, если определены микроскопические величины  $(S_1, \mu_1; \dots; S_N, \mu_N)$ , а в любой другой момент времени найдено из уравнений состояния предметов труда:

$$\frac{dS_j}{dt} = \mu_j, \quad \frac{d\mu_j}{dt} = f_j(t, S_j), \quad f(t, S_j) = \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S_j)}{[\chi]_0(t, S_j)} \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{1\psi}(t, S_j)}{[\chi]_0(t, S_j)} \right) \quad (1)$$

где  $[\chi]_0(t, S)$  - плотность предметов труда по технологическому маршруту;  $[\chi]_{1\psi}(t, S)$  - темп обработки предметов труда вдоль технологического маршрута оборудованием, расположенном по технологическому маршруту с плотностью  $\lambda_P = \lambda_P(t, S)$ . Введем нормированную функцию распределения  $N$  предметов труда  $\chi(t, S, \mu)$ . Разобьем фазовое пространство на такое число ячеек, чтобы размеры ячейки  $\Delta\Omega = \Delta S \cdot \Delta\mu$  были много меньше характерных размеров производственной системы и в то же время содержали внутри себя большое число предметов труда. Если размеры ячейки достаточно малы, то приближенное описание будет нести в себе почти столь же подробную информацию, что и точное. В силу того, что величина  $\chi(t, S, \mu) \cdot d\Omega$  представляет собой число предметов труда в бесконечно малой ячейке  $\Delta\Omega$  фазового пространства  $(S, \mu)$ , мы можем по изменению фазовой координаты  $S$  и фазовой скорости  $\mu$  базового продукта со временем судить и об изменении самой функции  $\chi(t, S, \mu)$  [3]:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} f(t, S) = \lambda_P(t, S) \left( \int_0^\infty \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \tilde{\mu} \chi(t, S, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu} - \mu \chi(t, S, \mu) \right), \quad \int_0^\infty \int_0^\infty \chi(t, S, \mu) d\mu dS = N(t). \quad (2)$$

Функции  $\varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu)$  определяет вероятность перехода предмета труда из состояния  $(S, \tilde{\mu})$  в состояние  $(S, \mu)$  в результате воздействия оборудования. Инженерно-производственная функция  $f(t, S)$  определяется из документооборота предприятия [4]. В большинстве интересных с практической точки зрения случаях функция  $\psi[\tilde{\mu} \rightarrow \mu]$  не зависит от состояния базового продукта до испытания воздействия  $\tilde{\mu}$  со стороны технологического оборудования, что приводит к упрощению интегро-дифференциального уравнения (2):

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi}{\partial \mu} f(t, S) = \lambda_{оборуд} \cdot \{\psi[\tilde{\mu} \rightarrow \mu] \cdot [\chi]_1 - \mu \cdot \chi\}, \quad \int_0^\infty \chi(t, S, \mu) d\mu = [\chi]_0, \quad \int_0^\infty \chi(t, S, \mu) \mu d\mu = [\chi]_1. \quad (3)$$

Нулевой  $[\chi]_0$  и первый  $[\chi]_1$  моменты функции распределения имеют простую производственную интерпретацию: заделы базовых продуктов и их темп движения вдоль технологической цепочки. С помощью моментов функции распределения предметов труда по состояниям запишем систему уравнений для макропараметров производственной поточной линии. Умножив уравнение (2) соответственно на 1,  $\mu$  и проинтегрировав по всему диапазону  $\mu$ , получим уравнения балансов [2]:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_1}{\partial S} = \lambda_P(t, S) \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \tilde{\mu} \chi(t, S, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu} - \mu \chi(t, S, \mu) d\mu, \quad (4)$$

$$\frac{\partial[\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_2}{\partial S} = f(S) \cdot [\chi]_0 + \lambda_P(t, S) \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t, S, \tilde{\mu}, \mu) \tilde{\mu} \chi(t, S, \tilde{\mu}) d\tilde{\mu} - \mu^2 \chi(t, S, \mu) d\mu \quad (5)$$

Уравнения балансов (4), (5), представляющие собой уравнения заделов, темпа предметов труда вдоль технологической цепочки, незамкнуты. Возможность получить замкнутую систему уравнений основана на свойствах функции  $\psi[\tilde{\mu} \rightarrow \mu]$ . Для поточной линии с большим количеством предметов труда в межоперационных заделах уравнения (4), (5) принимают вид [2,3]:

$$\frac{\partial[\chi]_0}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_1}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial[\chi]_1}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_2}{\partial S} = f(S) \cdot [\chi]_0, \quad [\chi]_2 = [\chi]_1 \cdot \left( \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0} \right) \quad (6)$$

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПАРАМЕТРОВ ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ

Хорошо известно, что влияние малых возмущающих факторов на поведение производственно-сбытовой системы будет не одинаковым для различных процессов. На одни технологические процессы это влияние незначительно, так как возмущенное состояние мало отличается от невозмущенного. Напротив, на другие технологические процессы влияние возмущений сказывается весьма значительно, как бы ни были малы возмущающие воздействия. Так как возмущающие факторы всегда существуют неизбежно, то становится понятным, что задача устойчивости производственного процесса приобретает очень важное теоретическое и практическое значение [5]. Исследование устойчивости производственного процесса будем рассматривать через макропараметры поточной линии: заделы  $[\chi]_0$  и темп перемещения базовых продуктов  $[\chi]_1$  от одной технологической операции к другой. Под возмущающими факторами будем понимать воздействия, не учитываемые при описании производственного процесса вследствие их малости по сравнению с основными факторами, влияющими на производство и выпуск продукции. Они могут действовать как мгновенно (что сведется к малому изменению начального состояния производственной системы), так и непрерывно (что будет означать: составленные уравнения производственного процесса отличаются от истинных на некоторые малые поправочные члены, не учтенные в уравнениях производственного процесса). Пусть системе уравнений (6) для описания производственного процесса соответствует невозмущенное решение

$$[\chi]_0^* = [\chi]_0^*(t, S), \quad [\chi]_1^* = [\chi]_1^*(t, S). \quad (7)$$

Решение (7) системы уравнений (6) соответствует плановым показателям производственного процесса. Пусть наблюдаемые производственной или диспетчерской службой макровеличины: технологические заделы  $[\chi]_0$  и темп движения базовых продуктов вдоль технологической цепочки  $[\chi]_1$ , получают случайные малые возмущения  $[y]_0$ ,  $[y]_1$  относительно своего невозмущенного состояния (7):

$$[y]_0 = [\chi]_0 - [\chi]_0^*, \quad [y]_1 = [\chi]_1 - [\chi]_1^*. \quad (8)$$

Линеаризуем систему уравнений (4), (15) относительно малых возмущений (8) в окрестности невозмущенного состояния (7):

$$\frac{\partial[y]_0}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S} = 0, \quad \frac{\partial[y]_1}{\partial t} + \frac{\partial[y]_1}{\partial S} \cdot B_{01} + [y]_1 \cdot B_{00} + \frac{\partial[y]_0}{\partial S} \cdot B_{10} + [y]_0 \cdot B_{11} = 0, \quad (9)$$

где введены коэффициенты

$$B_{00} = \frac{[\chi]_{1\psi}}{[\chi]_0}, \quad B_{01} = \frac{\partial B_{00}}{\partial S} - \frac{\partial(f(t, S) \cdot [\chi]_0)}{\partial [\chi]_1} \bigg|_0, \quad B_{10} = -\frac{[\chi]_1^* \cdot [\chi]_{1\psi}^*}{([\chi]_0^*)^2}, \quad B_{11} = -\frac{\partial}{\partial S} B_{10} - \frac{\partial(f(S) \cdot [\chi]_0)}{\partial [\chi]_0} \bigg|_0. \quad (10)$$

Период существования возмущения  $T_{\text{возм}}$  показателей составляет от нескольких дней до нескольких недель, в то время, как период изменения коэффициентов  $B_{00}$ ,  $B_{01}$ , определяется стратегическим управлением предприятия и составляет от нескольких месяцев до нескольких лет. Последнее обстоятельство дает возможность считать, что введенные коэффициенты (10) не зависят явно от времени на протяжении периода  $T_{\text{возм}}$ . Изменения во времени  $\Delta B_{00}$ ,  $\Delta B_{01}$ ,  $\Delta B_{10}$ ,  $\Delta B_{11}$  за период существования возмущения  $T_{\text{возм}}$  производственных показателей много меньше значений самих коэффициентов (10):

$$\frac{B_{00}}{T_{\text{возм}}} \gg \frac{\partial B_{00}}{\partial t}, \quad \frac{B_{01}}{T_{\text{возм}}} \gg \frac{\partial B_{01}}{\partial t}, \quad \frac{B_{10}}{T_{\text{возм}}} \gg \frac{\partial B_{10}}{\partial t}, \quad \frac{B_{11}}{T_{\text{возм}}} \gg \frac{\partial B_{11}}{\partial t}. \quad (11)$$

Таким образом, будем считать, что коэффициенты в уравнениях (9) зависят только от  $S$ . Разложим малые возмущения  $[y]_0$ ,  $[y]_1$  макропараметров  $[\chi]_0$  и  $[\chi]_1$  в ряд Фурье:

$$[y]_0 = \{y_0\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \{y_0\}_j \cdot \sin[k_j \cdot S] + \sum_{j=1}^{\infty} \{y_0\}_j \cdot \cos[k_j \cdot S], \quad [y]_1 = \{y_1\}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \{y_1\}_j \cdot \sin[k_j \cdot S] + \sum_{j=1}^{\infty} \{y_1\}_j \cdot \cos[k_j \cdot S], \quad k_j = \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{S_d} \quad (12)$$

где  $\{y_0\}_0$ ,  $\{y_0\}_j$ ,  $[y_0]_j$ ,  $\{y_1\}_0$ ,  $\{y_1\}_j$ ,  $[y_1]_j$  - коэффициенты разложения малых возмущений параметров производственной системы  $[y]_0$ ,  $[y]_1$  вдоль технологической цепочки производственного процесса. Подставляя в систему уравнений (9) вместо  $[y]_0$ ,  $[y]_1$  их разложение в ряд Фурье (12), получим системы уравнений для коэффициентов разложения малых возмущений  $[y]_0$ ,  $[y]_1$  параметров  $[\chi]_0$  и  $[\chi]_1$ :

$$\frac{d\{y_0\}_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\{y_1\}_0}{dt} + B_{01} \cdot \{y_1\}_0 + B_{11} \cdot \{y_0\}_0 = 0, \quad \frac{d\{y_0\}_j}{dt} - [y_1]_j \cdot k_j = 0, \quad \frac{d[y_0]_j}{dt} + \{y_1\}_j \cdot k_j = 0, \quad (13)$$

$$\frac{d\{y_1\}_j}{dt} - B_{00} \cdot [y_1]_j \cdot k_j + B_{01} \cdot \{y_1\}_j - B_{11} \cdot [y_0]_j \cdot k_j + B_{10} \cdot \{y_0\}_j = 0, \quad \frac{d[y_1]_j}{dt} + B_{00} \cdot \{y_1\}_j \cdot k_j + B_{01} \cdot [y_1]_j + B_{11} \cdot \{y_0\}_j \cdot k_j + B_{10} \cdot [y_0]_j = 0 \quad (14)$$

с соответствующими характеристическими уравнениями [5]

$$\mathcal{D}_0 \cdot (B_{01} + \mathcal{D}_0) = 0; \quad \mathcal{D}_j^2 + \mathcal{D}_j \cdot (B_{01} \pm i \cdot B_{00} \cdot k_j) + (k_j^2 \cdot B_{10} \mp i \cdot k_j \cdot B_{11}) = 0. \quad (15)$$

Система уравнений (13),(14) имеет характеристическое уравнение с одним нулевым корнем  $\mathcal{D}_0 = 0$ . Такие системы в теории устойчивости относятся к критическим случаям исследования устойчивости и требуют дополнительного внимания. Система уравнений (13),(14) относительно возмущений  $[y]_0$ ,  $[y]_1$  имеет решение:

$$\{y_0\}_0 = c\{y_0\}_0 = const, \quad \{y_1\}_0 = \exp(-B_{00} \cdot t) + \{\tilde{y}_1\}_0 \quad (16)$$

Тривиальное решение  $\{y_0\}_0 = c\{y_0\}_0 = 0$ ,  $\{y_1\}_0 = 0$  содержится в семействе решений рассмотренной системы уравнений и соответствует нулевому значению постоянной  $c\{y_0\}_0 = 0$ . В особом случае невозмущенное состояние устойчиво. Устойчивость при этом не будет асимптотической. Однако на практике колебания являются затухающими. Обоснование данного эффекта рассмотрено ниже.

### ОБОСНОВАНИЕ ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПОТОЧНОЙ ЛИНИИ

Кинетическое уравнение (2) является нелинейным. Если допускается колебание потоковых параметров технологической линии с малой амплитудой, то  $\chi(t, S, \mu)$  можно линеаризовать

$$\chi(t, S, \mu) = \chi_0(t, S, \mu) + \chi_1(t, S, \mu), \quad \chi_0(t, S, \mu) \gg \chi_1(t, S, \mu) \quad (17)$$

где  $\chi_1 = \chi_1(t, S, \mu)$  - малое отклонение функции от установившегося равновесного невозмущенного состояния  $\chi_0 = \chi_0(t, S, \mu)$ . Для работающих в равновесном состоянии поточных линий с высокой концентрацией оборудования по технологическому маршруту  $\lambda_P(t, S) \cdot S_d \gg 1$  кинетическое уравнений (1) имеет вид

$$\varphi_0(t, S, \mu) \cdot [\chi]_{lv} - \mu \cdot \chi_0(t, S, \mu) = 0, \quad f_0(t, S) = \frac{[\chi]_{lv}(t, S)}{[\chi_0]_0(t, S)} \cdot \frac{\partial}{\partial S} \left( \frac{[\chi]_{lv}(t, S)}{[\chi_0]_0(t, S)} \right), \quad \int_0^{\infty} \chi_0(t, S, \mu) d\mu = [\chi_0]_0(t, S), \quad N_m = \int_{S_{m-1}}^{S_m} [\chi]_0(t, S) dS$$

$$\frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial t} + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial S} \mu + \frac{\partial \chi_0(t, S, \mu)}{\partial \mu} f_0(t, S) = 0, \quad (18)$$

где  $\varphi_0(t, S, \mu)$  представлена функцией вида [6, с.16]:

$$\varphi_0(t, S, \mu) = \frac{\beta^\nu \cdot \mu^{\nu-1} \cdot e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad \Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot t^{\nu-1} dt, \quad \nu > 2, \quad \beta > 0. \quad (19)$$

С учетом (19) для установившегося равновесного режима

$$\chi_0 = [\chi_0]_{lv} \frac{\beta^\nu \mu^{\nu-2} e^{-\beta\mu}}{\Gamma(\nu)}, \quad B = \frac{[\chi_0]_{lv}}{[\chi_0]_0} = \frac{\nu}{\beta}, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \chi_0(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \chi_0(\mu) = 0. \quad (20)$$

В ходе технологической обработки перед  $m$ -тым оборудованием образуется межоперационный технологический задел в виде очереди  $N_m$  предметов труда [7, с.909-911]. Изменение плотности  $[\chi]_0(t, S)$  в кинетическом уравнении (1) приводит к изменению функции распределения предметов труда по состояниям  $\chi(t, S, \mu)$ , что вызывает изменение плотности предметов труда  $[\chi]_0(t, S)$  и, следовательно, изменение длины очереди  $N_m$ . Колебания длины очереди приводит к колебаниям функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$ , и наоборот.

Рассмотрим колебания потоковых параметров производственной линии для распространенного случая синхронизации технологического оборудования [4,8,9]. При синхронизированном режиме работы поточной линии среднее время обработки предмета труда на каждой технологической операции одинаково, откуда  $\frac{\partial [\chi]_{1\psi}(t,S)}{\partial S} = 0$ . Для одномоментного описания [4,10]

$$\frac{\partial [\chi]_0(t,S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{1\psi}(t,S)}{\partial S} = 0, \quad (21)$$

откуда из условия синхронизации оборудования следует  $\frac{\partial [\chi]_0(t,S)}{\partial t} = 0$ . Так как плотность межоперационных заделов для синхронизированной линии не меняется со временем, то поместив часть предметов труда в межоперационные страховые накопители, можно начальное распределение предметов труда вдоль технологического маршрута представить в виде равномерного распределения плотности. Линеаризуем кинетическое уравнение (2) в окрестности установившегося невозмущенного состояния  $\chi_0 = \chi_0(t,S,\mu)$  (20)

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \frac{\partial \chi_1}{\partial S} \mu - \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \frac{\partial [y]_0}{\partial S} = -\lambda_P \mu \chi_1, \quad \int_0^\infty \chi_1 d\mu = [y]_0. \quad (22)$$

Поскольку (22) линейно и не содержит координат в явном виде, то искомые функции  $\chi_1 = \chi_1(t,S,\mu)$  и  $[y]_0 = [y]_0(t,S)$  разложим на интервале  $[0, S_d]$  в ряд Фурье по координате S. Решения уравнения (22) будем искать в виде  $\chi_{1j}(t,\mu)e^{ik_j S}$ ,  $[y_j]_0(t)e^{ik_j S}$ ,  $k_j = (2\pi j)/S_d$ . Тогда

$$\frac{\partial \chi_{1j}}{\partial t} + (ik_j + \lambda_P) \chi_{1j} \mu - \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_j]_0(t) = 0, \quad \int_0^\infty \chi_{1j}(t,\mu) d\mu = [y_j]_0(t). \quad (23)$$

Для решения уравнения (23) воспользуемся Фурье преобразованием

$$\chi_{1j}(t,\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega t} \chi_{1j\omega}(\mu) d\omega, \quad \chi_{1j\omega}(\mu) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \chi_{1j}(t,\mu) dt, \quad [y_j]_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+\sigma}^{\infty+\sigma} e^{-i\omega t} [y_{j\omega}]_0 d\omega, \quad [y_{j\omega}]_0 = \int_0^\infty e^{i\omega t} [y_j]_0(t) dt \quad (24)$$

Умножим слагаемые кинетического уравнения (24) на  $e^{i\omega t}$  и проинтегрируем по времени t, получим

$$\chi_{1j\omega}(\mu) = \frac{\chi_{1j}(0,\mu) + \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} B^3 \frac{1}{[\chi]_{1\psi}} ik_j [y_{j\omega}]_0}{i(k_j \mu - \omega) + \lambda_P \mu}, \quad [y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + \lambda_P) - B^3 \frac{ik_j}{[\chi]_{1\psi}} \int_0^\infty \frac{\partial \chi_0}{\partial \mu} \frac{d\mu}{\left(\mu - \frac{p}{\beta}\right)}} \int_0^\infty \frac{\chi_{1j}(0,\mu)}{\left(\mu - \frac{p}{\beta}\right)} d\mu, \quad p = \beta \frac{\omega(k_j + i\lambda_P)}{k_j^2 + \lambda_P^2}. \quad (25)$$

Используя (20), получим:

$$\frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial \mu} = \left( \frac{(\nu-2)}{\mu} - \beta \right) \chi_0(\mu). \quad (23)$$

Принимая во внимание, что [11,с.252]

$$\frac{1}{[\chi]_{1\psi}} \int_0^\infty \frac{\partial \chi_0(\mu)}{\partial \mu} \frac{d\mu}{\left(\mu - \frac{p}{\beta}\right)} = -\beta^3 ((\nu-2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p, \quad (24)$$

Выражение (25) запишем в виде

$$[y_{k\omega}]_0 = \frac{1}{(ik_j + \lambda_P) + \nu^3 ik_j ((\nu-2) - p) \frac{p^{\nu-3} e^{-p}}{\Gamma(\nu)} \ln p} \int_0^\infty \frac{\chi_{1j}(0,\mu)}{\left(\mu - \frac{p}{\beta}\right)} d\mu \quad (25)$$

Применим обратное преобразование Фурье, найдем искомые функции  $\chi_1(t,S,\mu)$ ,  $[y]_0(t,S)$ . Однако, уже общие формулы (25) позволяют исследовать поведение  $\chi_{1j}(t,\mu)$  и  $[y_j]_0(t)$  с ростом t. Асимптотическое поведение функций при больших t определяется характером особенностей преобразования Лапласа. Функция  $\chi_{1j\omega}(\mu)$  имеет такие же особенности, что и  $[y_{k\omega}]_0$ , и добавочный полюс  $\mu\beta = p$ . Рассмотрим вопрос об

особенностях функции  $[y_{k\omega}]_0$ . Функция  $\chi_{1j}(0, \mu)$ , задающая начальное возмущение, не имеет особенностей при конечных значениях  $\mu$ . Тогда асимптотика интеграла (25) при больших  $t$  задается нулями уравнения

$$(ik_j + \lambda_p) + v^3 ik_j ((v-2) - p) \frac{p^{v-3} e^{-p}}{\Gamma(v)} \ln p = 0. \quad (26)$$

Для синхронизированной поточной линии  $\tau_1 \approx \tau_2 \approx \dots \approx \tau_m \approx \dots \approx \tau_M \approx \tau_0$  ( $N \gg M$ ), что позволяет длительность производственного цикла обработки партии  $N$ -деталей на  $M$ -операциях представить выражением

$$T_d \approx \sum_{m=1}^M \tau_m + \tau_M \cdot (N-1) \approx \tau_0 \cdot N. \quad (27)$$

Введем  $\omega_d = 2\pi/T_d$  и  $\omega_0 = 2\pi/\tau_0 = 2\pi \cdot [\chi]_{1\psi}$ . При изучении поточной линии рассмотрим колебания, период которых больше времени выполнения технологической операции  $\tau_0$  и не превышает длительность производственного цикла  $1 \leq \left| \omega/\omega_d \right| \ll T_d/\tau_0$ . При этом предполагаем, что длина волны колебаний потоковых параметров  $\gamma_j = 2\pi/k_j$  исследуемой линии превышает усредненную протяженность участка технологического маршрута, ограниченного одной технологической операцией и меньше протяженности всего технологического маршрута  $S_d$ :  $S_d/M = 1/\lambda_p \ll \gamma_j \leq S_d$ . Уравнение (26), определяющее зависимость между  $\omega$  и  $k_j$ , является дисперсионным уравнением поточной линии. Используя обозначение

$$\varepsilon = k_j/\lambda_p = \frac{2\pi j}{S_d \lambda_p} = \frac{2\pi j}{M} \ll 2\pi, \quad [\chi_0]_0 S_d = N, \quad \lambda_p S_d = M, \quad (28)$$

дисперсионное уравнение поточной линии (18) представим в виде соотношения параметров  $\varepsilon = k_j/\lambda_p$  и  $\omega/\omega_d$

$$D\left(\varepsilon, \omega/\omega_d\right) = 1 + i\varepsilon \left( 1 + v^3(v-2-p) \frac{p^{v-3} e^{-p}}{\Gamma(v)} \ln p \right) = 0, \quad p = \frac{2\pi \cdot v}{M} \frac{\omega}{\omega_d} \frac{(\varepsilon + i)}{(\varepsilon^2 + 1)}. \quad (29)$$

Дисперсионное уравнение (29) позволяет определить частоты колебаний величины межоперационных заделов вдоль производственной линии.

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис.1 и рис.2 представлено поведение действительной  $\text{Re}(D)$  и мнимой  $\text{Im}(D)$  составляющих функции  $D\left(\varepsilon, \omega/\omega_d\right)$  для производственной линии ( $M=400, v=3$ ) в диапазоне изменения параметров  $1.0 \leq \text{Re}\left(\omega/\omega_d\right) \leq 10.0$ ,  $(-10.0) \leq \text{Im}\left(\omega/\omega_d\right) \leq 10.0$  при  $j=1$  ( $\varepsilon=0.015$ ). Кривые соответствуют разным значениям  $\text{Im}\left(\omega/\omega_d\right)$  (кривые подписаны значением данной величины). Выполненный численный анализ уравнения (29) показывает, что при большом количестве технологических операций дисперсионное уравнение не имеет корней. Это означает, что возмущения плотности распределения предметов труда вдоль технологического маршрута являются затухающими. Решение дисперсионного уравнения для диапазона значений  $\varepsilon \in [0.01..3.0]$  ( $v=3$ ) представлено на рис.2. Пусть  $\omega_k/\omega_d$  тот из корней дисперсионного уравнения (29), который обладает меньшей по величине положительной мнимой частью (ближайший к вещественной оси). Тогда в интеграле выражения (25) будет существен (при больших  $t$ ) только вычет относительно полюса  $\omega_k$ . Остальные части интеграла будут экспоненциально малы по сравнению с указанным вариантом из-за наличия в подынтегральном выражении множителя  $e^{-i\omega t}$ . Асимптотический закон убывания возмущения плотности межоперационных заделов дается выражением

$$[y_j]_0(t) \approx \exp(-i \text{Re } \omega_k t) \cdot \exp(-\text{Im } \omega_k t). \quad (30)$$

С течением времени возмущения плотности затухают экспоненциально с декрементом  $\text{Im } \omega_k$ . Оценим характерное время затухания возмущения плотности предметов труда для поточной линии Intel, содержащей  $M=200$  технологических операций при длительности производственного цикла  $T_d=8..12$  недель [1]. Для



$\varepsilon = (2\pi/200) = 0,0314$  ( $\nu = 3$ ) с использованием результатов численных расчетов (рис.2) определяем теоретическое характерное время затухания  $\tau \approx 1..2$  недели. Наблюдения, полученные с производственных линий ( $M=200..400$ ,  $\nu=3$ ,  $\varepsilon=0.02..0.04$ ) по изготовлению полупроводниковой продукции Intel подтверждают численные расчеты для времени затухания колебаний плотности  $[\chi]_0(t, S)$  [12]. Экспериментальные данные [12, с.445] свидетельствуют о том, что на производственной линии периодически возникают возмущения потоковых параметров продолжительностью до  $\tau \approx 1..2$  недели при производственном цикле  $T_d = 8..12$  недель. В заключении остановимся на свойствах функции  $\chi(t, S, \mu)$ . Искомая функция получается подстановкой (25) в (24). Помимо полюсов, происходящих от  $[y_{k\omega}]_0$ , подынтегральное выражение имеет полюс в точке  $i(k_j \mu - \omega) + \lambda_P \mu = 0$ . По вычету в нем находим

$$\chi_{1j}(t, \mu) \approx \exp(-\lambda_P \mu t). \quad (31)$$

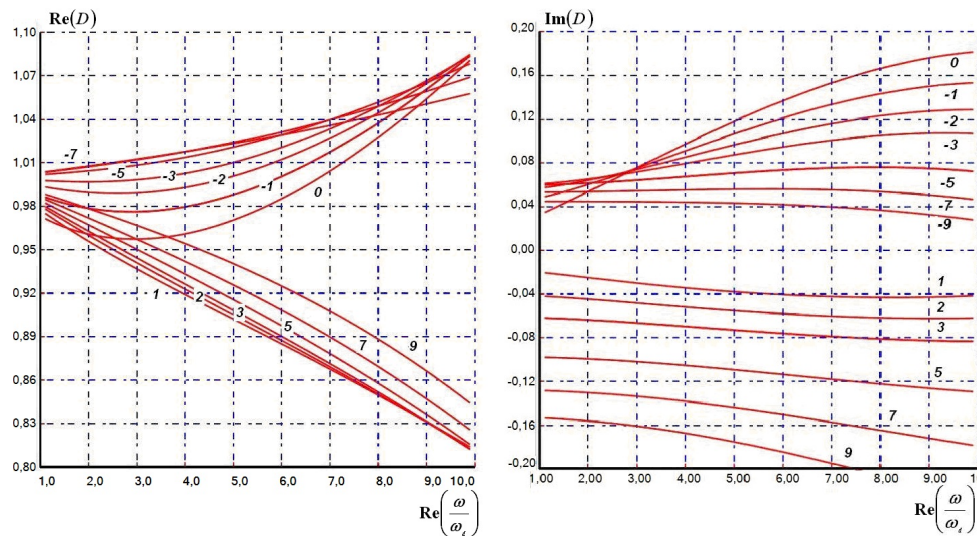


Рис.1. График функции  $D\left(\varepsilon, \frac{\omega}{\omega_d}\right)$  для производственной линии ( $M=400$ ,  $\nu=3$ ,  $j=1$ )

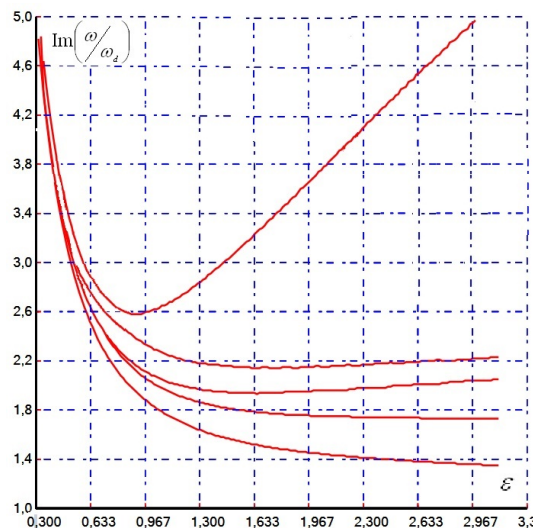


Рис. 2. Функция  $\text{Im}(\omega/\omega_d) = f(\varepsilon)$ .

Возмущение функции распределения затухает со временем. Функция  $\chi_1(t, S, \mu) \approx \exp(ik_j S - ik_j \mu t - \lambda_P \mu t)$  является решением кинетического уравнения при начальном распределении  $\chi_{1j}(0, \mu) \exp(ik_j S)$

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial t} + \frac{\partial \chi_1}{\partial S} \mu = -\lambda_P \mu \chi_1, \quad \langle \tau \rangle \approx (\lambda_P \langle \mu \rangle)^{-1} \approx \frac{T_d}{M} \quad (32)$$

с характерным временем затухания возмущений  $\langle \tau \rangle$  функции распределения  $\chi(t, S, \mu)$ .

### ВЫВОДЫ

Используя первый метод Ляпунова, получены условия устойчивости параметров поточной линии, представляющие собой соотношения между величиной операционных заделов и темпом движения предметов труда от одной технологической операции к другой операции вдоль технологического процесса. Условия устойчивости для параметров, характеризующих функционирования поточной линии, определяются условиями синхронизации производительности технологических участков. Показано, что в рассмотренном приближении устойчивость не является асимптотической. Для дальнейшего исследования устойчивости потоковых параметров применены методы физической кинетики. С использованием данного подхода для синхронизированной производственной линии детально исследованы колебания параметров поточной линии и теоретически обосновано их затухание. Получено и численно решено дисперсионное уравнение. Подтверждено с помощью численных расчетов, что для синхронизированных производственных поточных линий, экспериментально исследованных в работе [12], характерное время существования малых возмущений плотности распределения предметов труда вдоль технологического маршрута составляет  $\tau \approx 1..2$  недели при длительности производственного цикла  $T_d = 8..12$  недель.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ambruster D., Ringhofer C. Continuous models for production flows. In Proceedings of the 2004 American Control Conference, T- J. Jo – Boston, MA, USA. – 2004. – P. 4589-4594.
2. Demuckij V.P., Pignastaya V.S., Pignastyj O.M. Stokhasticheskoe opisanie ekonomiko-proizvodstvennyh sistem s massovym vypuskom produkci // Dopovidi Nacional'noyi akademiyi nauk Ukrayini. – Kyiv: Vidavnychij dim «Akademperiodika». – 2005. – No.7. – S.66-71.
3. Pignastyj O.M. Statisticheskaja teorija proizvodstvennyh sistem. – Kh.: KhNU, 2007. – 388 s.
4. Pignastyj O.M. Inzhenerno-proizvodstvennaja funkciya predpriyatiya s serijnym ili massovym vypuskom produkci // Voprosy proektirovaniya i proizvodstva konstrukcij letatel'nyh apparatov. – Khar'kov: NAKU. – 2005. – No.42(3). – S.111-117.
5. Demuckij V. P., Pignastyj O.M. Voprosy ustojchivosti makroskopicheskikh parametrov tehnologicheskikh processov massovogo proizvodstva // Dopovidi Nacional'noyi akademiyi nauk Ukrayini. – Kyiv: Vidavnychij dim «Akademperiodika». – 2006. – No.3. – S. 63-67.
6. Zhang L. System-theoretic properties of Production Lines. A dissertation submitted the degree of Doctor of Philosophy (Electrical Engineering: Systems). – Michigan, 2009. – P. 289.
7. Ambruster D., Degond P., Ringhofer C. A model for the dynamics of large queuing networks and supply chains // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2006. – Vol.83. – P. 896–920.
8. Berg R., Lefeber E., Rooda K. Modelling and Control of a Manufacturing Flow Line using Partial Differential Equations // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2008. – Vol.16. – No.1. – P.130-136.
9. Ambruster D., Ringhofer C. Continuous models for production flows / Proceedings of the 2004 American Control Conference., T- J. Jo – Boston, MA, USA, 2004. – P. 4589-4594.
10. Ambruster D., Marthaler D., Ringhofer C. Kinetic and fluid model hierarchies for supply chains supporting policy attributes. Bulletin of the Institute of Mathematics // Academica Sinica. – 2006. – Vol.66. – P.896 – 920.
11. Evgrafov M.A., Bezhanov K.A., Sidorov Ju.V., Fedorjuk M.V., Shabunin M.I. Sbornik zadach po teorii analiticheskikh funkcij. – M.: Nauka, 1972. – 416с.
12. Tian F., Willems S., Kempf K. An iterative approach to item-level tactical production and inventory planning. // International Journal of Production Economics. – 2011. – Vol. 33. – P. 439-450.